第27卷 第4期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 4
2010年08月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0612-09

# 使带权总完工时间为最小的自由作业排序问题*

陈荣军[1]， 唐国春[2]

(1- 常州工学院数学系，常州 213002； 2- 上海第二工业大学管理工程研究所，上海 201209)

**摘　要**: 本文研究多工序排序中的一类自由作业模式。对于使机器带权总完工时间为最小或者使工件带权总完工时间为最小的两类问题，本文用组合方法或者数学规划方法分别给出了稠密时间表的算法或者置换排序的算法，并分析算法的性能比。此方法在理论和应用两方面都是有意义的。

**关键词**: 排序；自由作业；带权总完工时间；性能比

**分类号**: **AMS**(2000) 90B35; 90C27　　**中图分类号**: O224　　**文献标识码**: A

## 1　引言

在自由作业[1] 问题中，有 $m$ 台机器 $M_1, M_2, \cdots, M_m$，要加工 $n$ 个工件$\{1, 2, \cdots, n\}$，在机器 $M_i$ 上工件 $j$ 的操作 (工序) 及其加工时间分别记为 $O_{ij}$ 与 $p_{ij}$。所有的工件都要在每一台机器上加工一次。在任何时刻，一台机器至多加工一个工件，一个工件至多被一台机器加工，不限制工件被机器加工的次序，亦不限制机器加工工件的次序。我们要寻找满足这些条件的时间表 (称为可行时间表)，使得工件或机器带权总完工时间最小，用三参数法记为

$$Om\|\sum_{j=1}^{n} w_jC_j, \quad Om\|\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi},$$

其中 $C_j, C_{Mi}$ 分别表示工件 $j$ 和 $M_i$ 的完工时间，$w_j, w_{Mi}$ 为工件 $j$ 和机器 $M_i$ 的权，$j$ 表示工件，$i$ 表示机器。

与自由作业相关的大部分问题是NP困难的，只有少数情形是多项式时间可解的。当机器数为两台时，Achugbue和Chin[2] 证明

$$O2\|\sum_{j=1}^{n} C_j$$

是极小NP困难的，即问题本身是NP困难的，但略微特殊一点的情况都是多项式时间可解的；Timkovsky[3] 在1998年证明

$$O2\,|\,p_{ij}=1,\ \text{chains}\,|\sum_{j=1}^{n} w_jC_j, \quad O3\,|\,p_{ij}=1,\ \text{chains}\,|\sum_{j=1}^{n} w_jC_j$$

**收稿日期**: 2008-04-21.　**作者简介**: 陈荣军 (1971年3月生)，男，博士，副教授. 研究方向：排序理论及应用.
***基金项目**: 国家自然科学基金重大国际 (地区) 合作研究 (70731160015)；江苏省教育厅 (yw06037)；江苏省“青篮”工程.

均极小NP困难；而下面几个问题为极大多项式时间可解，即这些问题本身是多项式时间可解的，但略微一般的情况都不是多项式时间可解的[4-6]。

$$O\,|\,p_{ij}=1,\ \ \text{outtree}\,\Big|\sum_{j=1}^{n}C_j,\quad O2\,|\,p_{ij}=1,\ \ \text{tree}\,\Big|\sum_{j=1}^{n}C_j,$$

$$Om\,|\,p_{ij}=1,\ \ r_j\,\Big|\sum_{j=1}^{n}C_j,\quad O\,|\,p_{ij}=1\,\Big|\sum_{j=1}^{n}w_jC_j.$$

可以看出，这些结论大都是在单位加工时间的假设条件下得到的。本文将在一般情形下研究问题$Om\|\sum_{j=1}^{n}w_jC_j$的多项式时间近似算法。另外，在日常生活中，人们也常常希望机器尽早完成加工，以减少机器租金等，这样产生了研究使机器带权总完工时间为最小的自由作业问题，即$Om\|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$，对这类问题，目前文献少有研究。

对自由作业问题的任一可行时间表$S$，如果机器$M_i$在时间区间$Q=[B,C)$内空闲(即机器$M_i$在这个时间区间$Q=[B,C)$上不加工任何工件，这个时间区间可以称为机器$M_i$的空闲区间)，在时刻$C$之后在机器$M_i$上加工的所有工件在$Q$中的任何时刻$t$都在其它的机器上加工，那么这个空闲区间称为是**合理**的。这表示在机器$M_i$的空闲区间以后加工的工件不可能直接提前到在这个空闲区间上加工，而不改变其它机器在该时间区间的加工情况。如果$S$中的一切空闲区间都是合理的，则称$S$是一个**稠密时间表**。稠密时间表的概念最早由Anna Raczmany[7]在1982年提出，关于它的性质研究可以参考文献[8,9]。

本文余下部分是这样安排的：第2节用组合方法研究问题

$$Om\,\|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi},\quad Om\,\|\sum_{j=1}^{n}w_jC_j$$

的稠密时间表性能比，得到定理1和定理2；第3节用数学规划方法研究这两类问题，同时假设工件带有到达时间，提出置换排序算法，并分析算法的性能比，即定理3和定理4；最后第4节总结全文。

## 2 $Om\|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$ 和 $Om\|\sum_{j=1}^{n}w_jC_j$ 的稠密时间表

### 2.1 $Om\,\|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$

本节研究$Om\,\|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$的稠密时间表性能比，其中$w_{Mi}, C_{Mi}$，$i=1,2,\cdots,m$，为机器$M_i$的权和完工时间。显然，下面几个性质成立。

**性质1** $C^*_{Mi}\ge L_i$，$i=1,2,\cdots,m$，其中$C^*_{Mi}$为最优完工时间，且

$$L_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

**性质2** $\max\limits_{i=1,2,\cdots,m}C^*_{Mi}\ge\max\limits_{j=1,2,\cdots,n}p_j$，其中

$$p_j=\sum_{i=1}^{m}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

**性质 3** $\sum\limits_{i=1}^{m} C_{Mi}^{*} \geq \sum\limits_{j=1}^{n} p_j.$

**性质 4** 对于任一稠密时间表，有

$$C_{Mi} = L_i + \tau_i \leq L_i + \min_{j\in G_i}\{p_j - p_{ij}\}, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

其中 $G_i$ 为机器 $M_i$ 的最后工件组，即 $M_i$ 在其最后一个空闲区间后加工的工件集，$\tau_i$ 为机器 $M_i$ 的空闲长度。显然有

$$\sum_{i=1}^{m} C_{Mi}^{*} \leq \sum_{i=1}^{m} C_{Mi} = \sum_{i=1}^{m} L_i + \sum_{i=1}^{m} \tau_i. \tag{1}$$

**证明** 由稠密时间表定义，每当机器 $M_i$ 空闲时，在该空闲后机器 $M_i$ 加工的全部工件，在该空闲时刻一定在其它机器上加工，因此对任意的 $j \in G_i$，有 $\tau_i \leq p_j - p_{ij}$，所以

$$\tau_i \leq \min_{j\in G_i}\{p_j - p_{ij}\}.$$

**引理 1** 对于问题 $Om\|\sum_{i=1}^{m} C_{Mi}$，如果任两台机器 $M_i$, $M_k$, $i,k = 1,2,\cdots,m$ 在

$$\left[0, \min_{i,k}\{C_{Mi}, C_{Mk}\}\right]$$

内不同时空闲，则稠密时间表的性能比为 2。

**证明** 由引理条件，知

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i \leq \sum_{i=1}^{m} L_i,$$

将上式代入 (1) 式并利用性质 1 和性质 3，得到

$$\sum_{i=1}^{m} C_{Mi}^{*} \leq \sum_{i=1}^{m} C_{Mi} \leq 2\sum_{i=1}^{m} L_i \leq 2\sum_{i=1}^{m} C_{Mi}^{*}.$$

一般地，有下面的结论。

**定理 1** 问题 $Om\|\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}$ 的稠密时间表性能比为

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}}{\min\{w_{M1}, w_{M2}, \cdots, w_{Mm}\}}$$

且是紧的。

**证明** 由时间表的稠密性得

$$C_{M1} = L_1 + \tau_1 \leq L_1 + p_{2,j_1} + \cdots + p_{m-1,j_1} + p_{m,j_1},$$

$$\cdots$$

$$C_{Mm} = L_m + \tau_m \leq L_m + p_{1,j_m} + \cdots + p_{m-1,j_m},$$

其中 $j_i \in G_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$，$G_i$ 为机器 $M_i$ 的最后工件组。于是有

$$\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C^*_{Mi} \le \sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi} \le \sum_{i=1}^{m} w_{Mi}L_i + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{i\neq k} w_{Mi}\Big)L_k$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} L_i\Big) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}}{\min\{w_{M1}, w_{M2}, \cdots, w_{Mm}\}}\Big(\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C^*_{Mi}\Big).$$

下面再证明紧性。对于问题 $Om\|\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}$，取机器权满足 $w_{M1} < w_{M2} \le \cdots \le w_{Mm}$ 且取工件为 $p_{1,1} = p$，$p_{2,1} = \cdots = p_{m,1} = \varepsilon$。将工件按照从第一台至最后一台机器的次序加工，得到稠密时间表 $S$ 的目标函数值为

$$\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi} = \sum_{i=1}^{m} w_{Mi}\big(p + (i-1)\varepsilon\big).$$

若将工件按照从最后一台机器至第一台机器的次序加工，得到稠密时间表 $\hat{S}$ 的目标函数值为

$$\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}\hat{C_{Mi}} = \sum_{i=2}^{m}(m+1-i)w_{Mi}\varepsilon + w_{M1}\big(p + (m-1)\varepsilon\big),$$

其中 $\hat{C_{Mi}}$ 为机器 $M_i$ 在时间表 $\hat{S}$ 的完工时间。于是有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}}{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}C^*_{Mi}} \ge \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}}{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}\hat{C_{Mi}}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}(p + (i-1)\varepsilon)}{\sum\limits_{i=2}^{m}(m+1-i)w_{Mi}\varepsilon + w_{M1}(p + (m-1)\varepsilon)} \longrightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}}{w_{M1}}(\varepsilon \to 0).$$

### 2.2 $Om\|\sum\limits_{j=1}^{n} w_jC_j$

在本节，$w_j, C_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$ 分别为工件 $j$ 的权和完工时间。稠密时间表有下面性质。

**性质 1** $C^*_j \ge p_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$，其中 $C^*_j$ 为最优时间表的工件完工时间。

**性质 2** $\sum\limits_{j=1}^{n} C^*_j \ge \sum\limits_{j=1}^{n} p_j = \sum\limits_{i=1}^{m} L_i$.

**性质 3** 在稠密时间表中，任一工件 $j$ 完工时间满足

$$C_j = p_j + \sum \tau_{ij}, \tag{2}$$

其中 $\tau_{ij}$ 为操作 $O_{ij}$ 与工件 $j$ 前一个被加工操作的间距，满足

$$\tau_{ij} \le L_i - p_{ij}. \tag{3}$$

**定理 2** 问题 $Om\|\sum_{j=1}^{n} w_jC_j$ 的稠密时间表性能比为

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j}{\min\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}},$$

且性能比是紧的。

**证明** 由式(2),(3)知

$$C_j \le p_j + \sum_{i=1}^{m}(L_i - p_{ij}),$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} w_j C_j &\le \sum_{j=1}^{n} w_j p_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} L_i\Big) - \sum_{j=1}^{n}\Big(w_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\Big)\\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} w_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j\Big) \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j}{\min\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}} \sum_{j=1}^{n} w_j p_j.\end{aligned}$$

为证明紧性，取

$$p_{1,1} = 1, \quad p_{i,1} = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$p_{1,j} = \varepsilon, \quad p_{i,j} = 0, \quad i = 2, \cdots, m, \quad j = 2, \cdots, n,$$

并取 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_n$，且 $n \ge m$。先将工件 $2, \cdots, n$ 安排完毕后，再安排工件 1，得到排序 $\hat{S}$，其目标值为

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \hat{C}_j = w_1 + \varepsilon\Big[w_1(n-1) + \sum_{i=2}^{n}(i-1)w_i\Big],$$

若工件 1 首先在第一台机器上加工，再将工件 $2, 3, \cdots, n$ 由贪婪算法依次安排加工，得到稠密时间表 $S$ 的目标函数值为

$$\sum_{j=1}^{n} w_j C_j = \sum_{i=1}^{n} w_i + \varepsilon\Big[(m-1)w_1 + \sum_{i=2}^{n}(i-1)w_i\Big],$$

于是有

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j C_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j \hat{C}_j} \longrightarrow \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j}{\min\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}} (\varepsilon \to 0).$$

## 3 $Om|r_j|\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}$ 和 $Om|r_j|\sum\limits_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的置换排序

本节用数学规划方法研究上节两个问题的置换排序，并假设工件带有到达时间。这里，置换排序指工件在各台机器上的加工次序一致。

### 3.1 $Om|r_j|\sum\limits_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}$

设工件 $j$ 具有到达时间 $r_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$，目标是使机器带权总完工时间 $\sum_{i=1}^{m} w_{Mi}C_{Mi}$ 为最小，其中 $w_{Mi}, C_{Mi}$，$i = 1, 2, \cdots, m$，分别是机器 $M_i$ 的权和机器 $M_i$ 的完工时间。不妨设 $w_{M1} \ge w_{M2} \ge \cdots \ge w_{Mm}$。记 $C_{ij}$ 为操作 $O_{ij}$ 的完工时间，$[j]$ 表示第 $j$ 个被加工的工件。显

然有 $C_{Mi}=C_{i[n]}$，$i=1,2,\cdots,m$。因此问题可以写为 $Om|r_j|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{i[n]}$。对于单机排序问题，文献[10]给出下列不等式

$$\sum_{j\in A}p_jC_j\geq\frac{1}{2}\Big(\Big(\sum_{j\in A}p_j\Big)^2+\sum_{j\in A}p_j^2\Big),\quad\forall\,A\subseteq N,\tag{4}$$

其中 $A$ 为工件 $N$ 的任一子集，$C_j$ 为工件 $j$ 的完工时间，$p_j$ 为它的加工长度。在上式中，如果取 $A=\{1,2,\cdots,j\}$，则有

$$p_jC_j\geq\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{j}p_k\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}p_k^2-\sum_{k=1}^{j-1}p_kC_k\geq\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{j}p_k\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}p_k^2-\sum_{k=1}^{j-1}p_kC_j,$$

于是得到

$$\sum_{k=1}^{j}p_k\leq 2C_j-\frac{\sum\limits_{k=1}^{j}p_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{j}p_k}\leq 2C_j-\frac{\sum\limits_{k=1}^{j}p_k}{j},$$

即

$$\sum_{k=1}^{j}p_k\leq\frac{2}{1+\frac{1}{j}}C_j.\tag{5}$$

后面要用到(5)式。下面先利用(4)式，给出问题 $Om|r_j|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$ 的置换排序的数学规划如下

$$\begin{cases}\min & \sum\limits_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{i[n]}^{LP}\\ \text{s.t.} & \sum\limits_{[j]\in A}p_{h[j]}C_{h[j]}^{LP}\geq\frac{1}{2}\Big(\Big(\sum\limits_{[j]\in A}p_{h[j]}\Big)^2+\sum\limits_{[j]\in A}p_{h[j]}^2\Big),\quad\forall\,A\subseteq N,\quad h=1,2,\cdots,m,\\ & C_{h[j]}^{LP}\geq C_{(h-1)[j]}^{LP}+p_{h[j]},\quad h=2,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n,\\ & C_{1j}^{LP}\geq r_j+p_{1j},\quad j=1,\cdots,n,\end{cases}\tag{6}$$

上式中 $C_{ij}^{LP}$ 为由线性规划(6)得到的操作 $O_{ij}$ 的完工时间。由(6)式最优解 $\{C_{ij}^{LP}:i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\}$ 构造下面算法I。

**算法I** 1) 将工件按照 $C_{m[1]}^{LP}\leq C_{m[2]}^{LP}\leq\cdots\leq C_{m[n]}^{LP}$ 重新编号；

2) 从第一台机器起，到最后一台机器为止，按照工件次序 $(1,2,\cdots,n)$，在每台机器上尽早安排每一个操作。

**定理3** 对于问题 $Om|r_j|\sum_{i=1}^{m}w_{Mi}C_{Mi}$，算法I性能比为 $3m$；如果 $r_j=0$，则算法性能比为 $2m$。

证明 记 $C_{ij}^{H}$ 为由算法I得到的操作 $O_{ij}$ 的完工时间，则有

$$C_{hn}^{H}\leq C_{1n}^{H}+\sum_{i=2}^{h}\sum_{k=1}^{n}p_{ik},\quad h=2,3,\cdots,m,\tag{7}$$

$$C_{1n}^{H}\leq\max_j r_j+\sum_{k=1}^{n}p_{1k}\leq C_{1n}^{LP}+\sum_{k=1}^{n-1}p_{1k}.\tag{8}$$

将 (5) 式分别代入 (7), (8) 得到

$$C_{hn}^H \le C_{1n}^H + \sum_{i=2}^{h} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} C_{in}^{LP}, \quad h = 2, 3, \cdots, n,$$

$$C_{1n}^H \le C_{1n}^{LP}\Big(1 + \frac{2}{1+\frac{1}{n-1}}\Big).$$

于是有

$$\begin{aligned} W(H) &= \sum_{i=1}^{m} w_{Mi} C_{Mi}^H = w_{M1} C_{1n}^H + \sum_{h=2}^{m} w_{Mh} C_{hn}^H \\ &\le w_{M1} C_{1n}^H + \sum_{h=2}^{m} w_{Mh}\Big(C_{1n}^H + \sum_{i=2}^{h} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} C_{in}^{LP}\Big) \\ &\le \Big(\sum_{h=1}^{m} w_{Mh}\Big)\Big(1 + \frac{2}{1+\frac{1}{n-1}}\Big) C_{1n}^{LP} + \sum_{h=2}^{m} (h-1) \frac{2}{1+\frac{1}{n}} w_{Mh} C_{hn}^{LP} \\ &\le m\Big(1 + \frac{2}{1+\frac{1}{n-1}}\Big) w_{M1} C_{1n}^{LP} + \frac{2(m-1)}{1+\frac{1}{n}} \sum_{h=2}^{m} w_{Mh} C_{hn}^{LP} \\ &< 3m \sum_{i=1}^{m} w_{Mi} C_{in}^{LP} \le 3mW(OPT), \end{aligned}$$

即算法I性能比为 $3m$。若 $r_j = 0$，此时有 $W(H) \le 2mW(OPT)$，算法I性能比为 $2m$。

### 3.2 $Om|r_j|\sum\limits_{j=1}^{n} w_j C_j$

本节研究问题 $Om|r_j|\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的置换排序性能比，这里 $w_j$, $C_j$ 分别为工件 $j$ 的权和完工时间。由于是置换排序，不妨假设所有工件完工时间均在最后一台机器上达到。这样，可以给出问题 $Om|r_j|\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的数学规划如下

$$\begin{cases} \min & \sum\limits_{j=1}^{n} w_{[j]} C_{m[j]}^{LP} \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{[j]\in A} p_{h[j]} C_{h[j]}^{LP} \ge \frac{1}{2}\Big(\Big(\sum\limits_{[j]\in A} p_{h[j]}\Big)^2 + \sum\limits_{[j]\in A} p_{h[j]}^2\Big), \quad \forall\, A \subseteq N, \quad h = 1, 2, \cdots, m, \\ & C_{h[j]}^{LP} \ge C_{(h-1)[j]}^{LP} + p_{h[j]}, \quad h = 2, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n, \\ & C_{1j}^{LP} \ge r_j + p_{1j}, \quad j = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $C_{ij}^{LP}$ 是由线性规划 (9) 得到的操作 $O_{ij}$ 的完工时间。对该问题，算法I仍然有效，且有下面的定理4。

**定理4** 对问题 $Om|r_j|\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$，算法I性能比为 $2m+1$；如果 $r_j = 0$，则算法性能比为 $2m$。

**证明** 记 $C_{ij}^H$ 为由算法I得到的操作 $O_{ij}$ 的完工时间，则有

$$C_{mj}^H \le C_{1j}^H + \sum_{h=2}^{m} \sum_{k=1}^{j} p_{hk}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

类似地，由 (5) 式得

$$C_{mj}^{H} \le C_{1j}^{H} + \sum_{h=2}^{m} \frac{2}{1+\frac{1}{j}} C_{hj}^{LP}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

又因为

$$C_{1j}^{H} \le r_j + \sum_{k=1}^{j} p_{1k} \le C_{1j}^{LP} + \frac{2}{1+\frac{1}{j}} C_{1j}^{LP},$$

所以有

$$C_{mj}^{H} \le C_{1j}^{LP} + \sum_{h=1}^{m} \frac{2}{1+\frac{1}{j}} C_{hj}^{LP} < (2m+1) C_{mj}^{LP}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

这样，我们有

$$W(H) = \sum_{j=1}^{n} w_j C_j^{H} \le (2m+1) \sum_{j=1}^{n} w_j C_{mj}^{LP} \le (2m+1) W(OPT),$$

即算法 I 性能比为 $2m+1$。若 $r_j = 0$，则易知算法 I 性能比是 $2m$。

## 4 结束语

本文首先用组合方法研究问题

$$Om \| \sum_{i=1}^{m} w_{Mi} C_{Mi}, \quad Om \| \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$$

稠密时间表，再用数学规划方法研究上述两问题的置换排序，并假设工件有不同的到达时间。对这两个 NP 困难问题，寻找性能更好的近似算法将是今后进一步研究的方向。


**参考文献：**

[1] Tang G, *et al.* Theory of Modern Scheduling[M]. Shanghai: Shanghai Popular Science Press, 2003

[2] Achugbue J O, Chin F Y. Scheduling the open shop to minimize mean flow time[J]. SIAM-C, 1982, 11: 709-720

[3] Timkovsky V G. Is a unit-time job shop not easier than identical parallel machines?[J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 85: 149-162

[4] Braesel H, *et al.* A polynomial time algorithm for an open shop problem with unit processing times and tree constraints[J]. Discrete Applied Mathematics, 1995, 59: 11-21

[5] Tautenhahn T, Woeginger G J. Minimizing the total completion time in a unit-time open shop with release dates[J]. Operations Research Letters, 1997, 20: 207-212

[6] Brucker P, *et al.* Open shop problems with unit time operations[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1993, 37: 59-73

[7] Bárány I, Fiala T. Nearly optimum solution of multimachine scheduling problems (in Hungarian)[J]. Szigma Mathematika Közgadasági Folyoírat, 1982, 15: 177-191

[8] Chen B, Strusevich V A. Approximation algorithms for three machine open-shop scheduling[J]. ORSA Journal on Computing, 1993, 5: 321-326

[9] Chen R, Yu W. Analysis of operation chain's properties of dense schedules for open-shop[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2003, 29(5): 522-526

[10] Andreas S, Schulz. Scheduling to minimize total completion time: performance guarantees of LP-based Heuritics and low bounds[J]. Proceedings of the 5th International IPCO Conference, 1996: 301-315

# Open Shop Problem to Minimize the Total Weighted Completion Time

CHEN Rong-jun[1], TANG Guo-chun[2]

(1- Department of Mathematics, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002;
2- Institute of Management Engineering, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209)

**Abstract:** In this paper, we study a multi-operation model with an open shop. We propose algorithms of the dense schedules and permutation ones, respectively, to solve the scheduling problems to minimize the total weighted completion time of the machine and the job, respectively. These algorithms are based on the combination theory and mathematical programming. Moreover, we analyze the worst case performance ratios for these algorithms. These algorithms is of importance in both theory and its practical significance.

**Keywords:** scheduling; open shop; total weighted completion time; performance ratio

**Received:** 21 Apr 2008. **Accepted:** 09 Sep 2009.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (70731160015); the Foundation of Jiangsu Educational Committee (yw06037); the Program to Cultivate Middle-aged and Young Scholars of Colleges and Universities of Jiangsu Province.